

HEINRICH·HERTZ·INSTITUT FÜR SCHWINGUNGSFORSCHUNG
BERLIN·CHARLOTTENBURG

Technischer Bericht Nr. 43

Berechnung der Phasenkonstante und der Dämpfung
der H_{01} -Welle in einem gewellten Kreishohlleiter

Dipl.-Ing. G. MORGENSTERN

H43

Berlin
1 9 6 0

Berechnung der Phasenkonstante und der Dämpfung der H_{01} -Welle
in einem gewellten Kreishohlleiter

Zusammenfassung

Die Phasenkonstante und die Dämpfungszunahme der H_{01} -Welle gegenüber einem glatten Kreishohlleiter wird in einem gewellten Kreishohlleiter mit einem mittleren Durchmesser von 43,5 mm und einer Periodenlänge von 10,4 mm bei 15 GHz berechnet. In der hierbei zu lösenden transzendenten Gleichung mit unendlich vielen Gliedern wird nur das erste Glied berücksichtigt. Der Vergleich des in dieser Näherung erhaltenen Hohlleiterprofils mit dem gegebenen Wellrohrprofil zeigt, daß die Näherung recht gut ist. Die numerische Auswertung ergibt eine relative Leistungsdämpfungszunahme von 63 %

Heinrich-Hertz-Institut für Schwingungsforschung

Der Bearbeiter

gez. Morgenstern

(Dipl.-Ing. G. MORGENSTERN)

Der Abteilungsleiter

gez. Gundlach

(Prof.Dr.-Ing. GUNDLACH)

Der Institutsdirektor

gez. Cremer

(Prof.Dr.-Ing. CREMER)

Berlin-Charlottenburg, den 27. September 1960



Zusammenstellung der verwendeten Symbole

Das verwendete Koordinatensystem hat die Metrik

$$(ds)^2 = (dr)^2 + r^2 \cdot (d\varphi)^2 + (dz)^2$$

z ist die Koordinate in Ausbreitungsrichtung

λ_z : Wellenlänge der H_{01} -Welle

$\beta = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda_z}$: Ausbreitungskonstante der H_{01} -Welle

p : Periodenlänge des gewellten Kreishohlleiters

f : Frequenz

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$$

$$k^2 = \omega^2 \epsilon / u$$

$$\lambda_0 = \frac{c}{f}$$

$$\chi_n^2 = k^2 - \left(\frac{2 \cdot \pi \cdot n}{p} - \beta \right)^2$$

$$\beta_{-n} = \left(\frac{2 \cdot \pi \cdot n}{p} - \beta \right)$$

a : bezüglich der Phasenkonstante äquivalenter Radius eines glatten Kreishohlleiters

$k_{(11)}$: 1. von 0 verschiedene Nullstelle der Besselfunktion 1. Ordnung.

$I_1(r)$: Besselfunktion 1. Ordnung

σ : Leitfähigkeit der Hohlleiterwandung

$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \cdot \mu \cdot \epsilon}}$: Eindringtiefe

Einleitung:

Um einige Schwierigkeiten zu umgehen, die bei der Verwendung eines glatten Kreishohlleiters zur Uebertragung der H_{01} -Welle auftreten - siehe Technischer Bericht des Heinrich-Hertz-Instituts Nr. 32 - , wird in Erwägung gezogen, einen wendelförmig gewellten Kreishohlleiter mit einem Profil nach Fig. 1 zu verwenden. Dieser hat gegenüber dem glatten Hohlleiter zwei Vorzüge:

- 1) Der gewellte Hohlleiter ist recht biegsam. Er läßt sich daher auf Kabelrollen aufwickeln und kann in beliebiger Länge hergestellt und verlegt werden.
- 2) Die in einem glatten, ideal leitenden Kreishohlleiter bestehende Entartung zwischen der H_{01} -Welle und der E_{11} -Welle ist im Wellrohr aufgehoben. Dieser Hohlleiter darf daher mit leichten Krümmungen ausgelegt werden.

Der Nachteil dieses Wellrohres gegenüber dem glatten Rohr ist seine erhöhte, durch Wärmeverluste verursachte Dämpfung.

Im Folgenden wird die Dämpfungszunahme der H_{01} -Welle gegenüber einem glatten Kreishohlleiter in einem von der Firma Hackethal, Hannover, hergestellten wendelförmigen Wellrohr unter einer vereinfachenden Annahme bei $f = 15$ GHz berechnet.

Ableitung der Gleichung für die Phasenkonstante der H_{01} -Welle als Funktion des Profils des gewellten Hohlleiters und der Frequenz

Vereinfachende Annahme:

Zur Berechnung von Ausbreitungskonstante und Dämpfung wird der wendelförmige Wellhohlleiter, dessen Innenprofil beschrieben wird mittels der Funktion

$$r = r(z + \frac{p}{2} \cdot \varphi) \quad (1)$$

ersetzt durch ein Wellhohlleiter mit dem gleichen Profil, jedoch ohne Steigung:

$$r = r(z) = r(z + p) \quad (2)$$

Differentialgleichung für die elektromagnetischen Feldkomponenten der H_{01} -Welle:

Definitionsgemäß ist die H_{01} -Welle ein rotationssymmetrischer Wellentyp,

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0 \quad (3)$$

der nur folgende, von 0 verschiedene Feldkomponenten aufweist:

$$E_{\varphi}; H_r; H_z \quad (4)$$

Für diese Komponenten (4) lauten die Maxwell'schen Gleichungen in Kreiszyylinderkoordinaten unter Berücksichtigung von (3):

$$-E_{\varphi/z} = -j \cdot \omega \cdot u H_r; E_{\varphi/z} = \frac{\partial}{\partial z} E_{\varphi} \quad (5a)$$

$$E_{\varphi/r} + \frac{1}{r} \cdot E_{\varphi} = -j \cdot \omega \cdot u H_z \quad (5b)$$

$$H_{r/z} - H_{z/r} = j \cdot \omega \epsilon E_{\varphi} \quad (5c)$$

Durch Elimination von H_r und H_z aus (5c) erhält man als Differentialgleichung für $E_{\varphi}(r, z)$:

$$E_{\varphi/r/r} + \frac{1}{r} \cdot E_{\varphi/r} - \frac{1}{r^2} \cdot E_{\varphi} + E_{\varphi/z/z} + \omega^2 \cdot \epsilon \cdot u \cdot E_{\varphi} = 0 \quad (6)$$

Die Feldkomponenten H_r und H_z lassen sich nach (5a) und (5b) aus E_{φ} berechnen.

Nach dem Hill'schen Satz über die Lösung von Differentialgleichungen mit periodischen Parametern wird für die z-Abhängigkeit von E_{φ} folgender allgemeiner Ansatz gewählt:

$$E_{\varphi}(r, z) = e^{-j\beta z} \cdot f(r, z) \quad (7)$$

mit $f(r, z) = f(r, z + p) \quad (8)$

$f(r, z)$ wird in eine Fourier-Reihe nach z entwickelt:

$$f(r, z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_n(r) \cdot e^{j \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot n \cdot z}{p}}, \quad (9)$$

in (7) eingesetzt,

$$E_\varphi = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_n(r) \cdot e^{j \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi \cdot n}{p} - \beta \right) \cdot z} \quad (10)$$

und (10) wird wiederum in (6) eingesetzt. Die Differentialgleichung (6) soll für jedes Glied von (10) erfüllt sein. Daraus ergeben sich folgende gewöhnliche Differentialgleichungen für $R_n(r)$:

$$R_n''(r) + \frac{1}{r} \cdot R_n'(r) + \left(\chi_n^2 - \frac{1}{r^2} \right) \cdot R_n(r) = 0 \quad (11)$$

mit

$$\chi_n^2 = k^2 - \beta_{-n}^2; \quad (12)$$

$$k^2 = \omega^2 \cdot \epsilon / u$$

$$\beta_{-n} = \left(\frac{2 \cdot \pi \cdot n}{p} - \beta \right)$$

Die beschränkten und damit physikalisch sinnvollen Lösungen von (11) sind:

$$R_n(r) = B_n \cdot I_1(r \cdot \chi_n) \quad (13)$$

mit den noch verfügbaren Konstanten B_n .

Die Randbedingungen für die elektromagnetischen Feldkomponenten der H_{01} -Welle:

Die Konstanten B_n in dem Ausdruck für $R_n(r)$ - Gleichung (13) - bestimmen sich aus der Randbedingung: Die tangentielle Komponente von \mathcal{E} an der Leiteroberfläche ist 0. Nach (7), (9) und (13) bedeutet dies, daß folgende Bedingung an der Leiteroberfläche erfüllt sein muß:

$$f(r, z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} B_n \cdot I_1(r \cdot \sqrt{k^2 - \beta_{-n}^2}) \cdot e^{j \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot n \cdot z}{p}} = 0 \quad (14)$$

Wird berücksichtigt, daß $f(r, z) = 0$ eine reelle Funktion darstellen soll, und wird

$$B_0 = 1; B_n = K_n \cdot B_0 \quad (15)$$

gesetzt, so formt sich (14) um in:

$$f(r, z) = I_1\left(r \cdot \frac{k_{(11)}}{a}\right) - 2 \cdot \sum K_n \cdot (-j) \cdot I_1(j \cdot r \cdot \sqrt{\beta_{-n}^2 - k^2}) \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot n \cdot z}{p}\right) \quad (16)$$

Hierin ist gesetzt worden:

$$\sqrt{k^2 - \beta^2} = \frac{k_{(11)}}{a} \quad (17)$$

$k_{(11)}$: 1. von 0 verschiedene Nullstelle der Besselfunktion
1. Ordnung.

Die Bedeutung von a ist also folgende:

Werden gleiche Kreisfrequenzen ω und gleiche Phasenkonstanten β des H_{01} -Wellentyps in einem gewellten Kreishohlleiter mit dem durch (16) beschriebenen Profil und in einem glatten Kreishohlleiter - $K_n = 0$ - vorgegeben, so hat der glatte Kreishohlleiter den Radius a : a ist der äquivalente Radius des Wellrohres mit dem Profil, das durch (16) definiert ist.

Die transzendente Gleichung (16) stellt die Abhängigkeit zwischen Phasenkonstante

$$\beta = \frac{2 \cdot \pi \cdot n}{p} - \beta_{-n}$$

Kreisfrequenz $\omega = k / \sqrt{\epsilon \cdot \mu}$ und Profil des Wellrohres - gegeben durch die Größen a ; K_n - dar. Durch geeignete Wahl der Konstanten K_n läßt sich die Randkurve $f(r, z) = 0$ einem vorgegebenen Profil des Wellhohlleiters anpassen.

Numerische Auswertung der Formel für die Phasenkonstante als Funktion des Hohlleiterprofils und der Frequenz bei Beschränkung auf nur ein von z abhängiges Glied in der Reihenentwicklung.

Bei Beschränkung auf das erste Glied der unendlichen Summe in Gleichung (16) stehen zur Anpassung der Randkurve an das vorliegende Profil die beiden Parameter a und K_1 zur Verfügung. Gleichung (16) vereinfacht sich zu:

$$\sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot z}{p}\right) = \frac{I_1\left(r \cdot \frac{k(11)}{a}\right)}{2 \cdot K_1 \cdot (-j \cdot I_1(j \cdot r \cdot \sqrt{\beta_{-1}^2 - k^2}))} \quad (18)$$

Nur solche Werte K_1 sind brauchbar für die Beschreibung des Profils des Wellrohres, die zu jedem z-Wert ein r-Wert ergeben. Die numerische Auswertung zeigt, daß der Variationsbereich von K_1 dadurch beschränkt wird:

$$0 \leq |K_1| \leq K_{1\max}$$

Das durch a und K_1 festgelegte Profil hängt außerdem über $(\beta_{-1}^2 - k^2)$ von der vorgegebenen Frequenz der elektromagnetischen Schwingung ab.

Die numerische Berechnung wird durchgeführt bei $f = 15$ GHz. Dieser Wert wird vermutlich im Betriebsbereich liegen, da er dicht unterhalb des ersten Sperrfrequenzbereiches liegt, die der Wellhohlleiter mit seiner periodischen Struktur aufweist. Die Parameter a und K_1 werden so gewählt, daß der minimale Radius r_{\min} und der maximale Radius r_{\max} der Funktion (18) mit den entsprechenden Werten des gegebenen Wellrohres übereinstimmen.

Durch Probieren findet man, daß in (18) folgende Werte eingesetzt werden müssen:

$$a = 2,09 \text{ (cm)}; K_1 = 0,0108 ; \quad (19)$$

außerdem ist:

$$k = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda_0} = \pi \text{ (cm)}$$

$p = 1,04 \text{ (cm)}$: Periodenlänge des Wellrohres

$$\beta = \sqrt{k^2 - \left(\frac{k(11)}{a}\right)^2} = 2,55 \text{ (cm}^{-1}\text{)} \quad (19)$$

$$\lambda_z = 2,46 \text{ (cm)}$$

$$\beta_{-1} = 3,49 \text{ (cm}^{-1}\text{)}$$

Die aus (18) mit diesen Werten berechnete Randkurve ist in Fig. 2 (Kurve I) dargestellt. Dort ist ebenfalls der äquivalente Radius $a = 2,09 \text{ (cm)}$ eines glatten Kreishohlleiters mit der gleichen Phasenkonstante für die H_{01} -Welle eingetragen. Ein Vergleich der Kurve I von Fig. 2 mit dem vorliegenden Profil auf Fig. 1 zeigt eine gute Übereinstimmung. Außerdem sind noch zwei weitere Randkurven in Fig. 2 eingetragen, die zu anderen Werten von K_1 bei gleichem äquivalenten Radius und gleicher Frequenz gehören. Kurve III gehört zu $K_1 = K_{1\max}$.

Bei Berücksichtigung von weiteren Summanden in Gleichung (16) ist es möglich, ein vorgegebenes Profil noch besser durch die Randkurve zu approximieren.

Berechnung der Erhöhung der Ohm'schen Verluste der H_{01} -Welle im Wellrohr gegenüber einem glatten Kreisrohr

Zur Berechnung der Ohm'schen Verluste in 1. Näherung wird - wie üblich - die Feldverteilung bei idealer Leitfähigkeit des Wellrohres berechnet. Der Wandstrom im endlich leitenden Medium und die daraus resultierende elektrische Tangentialkomponente wird ermittelt, ohne aber die daraus folgende Änderung der Feldverteilung im Hohlleiter zu berücksichtigen. Die Ohm'schen Verluste pro Längeneinheit sind dann gleich dem über die Hohlleiteroberfläche integrierten zeitlichen Mittelwert des POYNTING'schen Vektors:

$$P = \int_{z=0}^p \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{2\pi}{|(\xi \times \eta)|} d\varphi = \iint \frac{|(\xi \times \eta)|}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f/r}\right)^2}} r d\varphi dz \quad (21)$$

mit $f(r, z) = 0$ als Oberfläche des Hohlleiters.

Unter Verwendung von (5a); (5b); (7) erhält man aus (21)

$$P = 2\pi \cdot \frac{1}{\epsilon \cdot \delta} \cdot \frac{1}{(\omega \cdot u)^2} \int_{z=0}^p (f/z^2 + f/r^2) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{f}{f/r}\right)^2} \cdot r \cdot dz \quad (22)$$

Für den glatten Hohlleiter mit dem äquivalenten Radius a ergibt sich

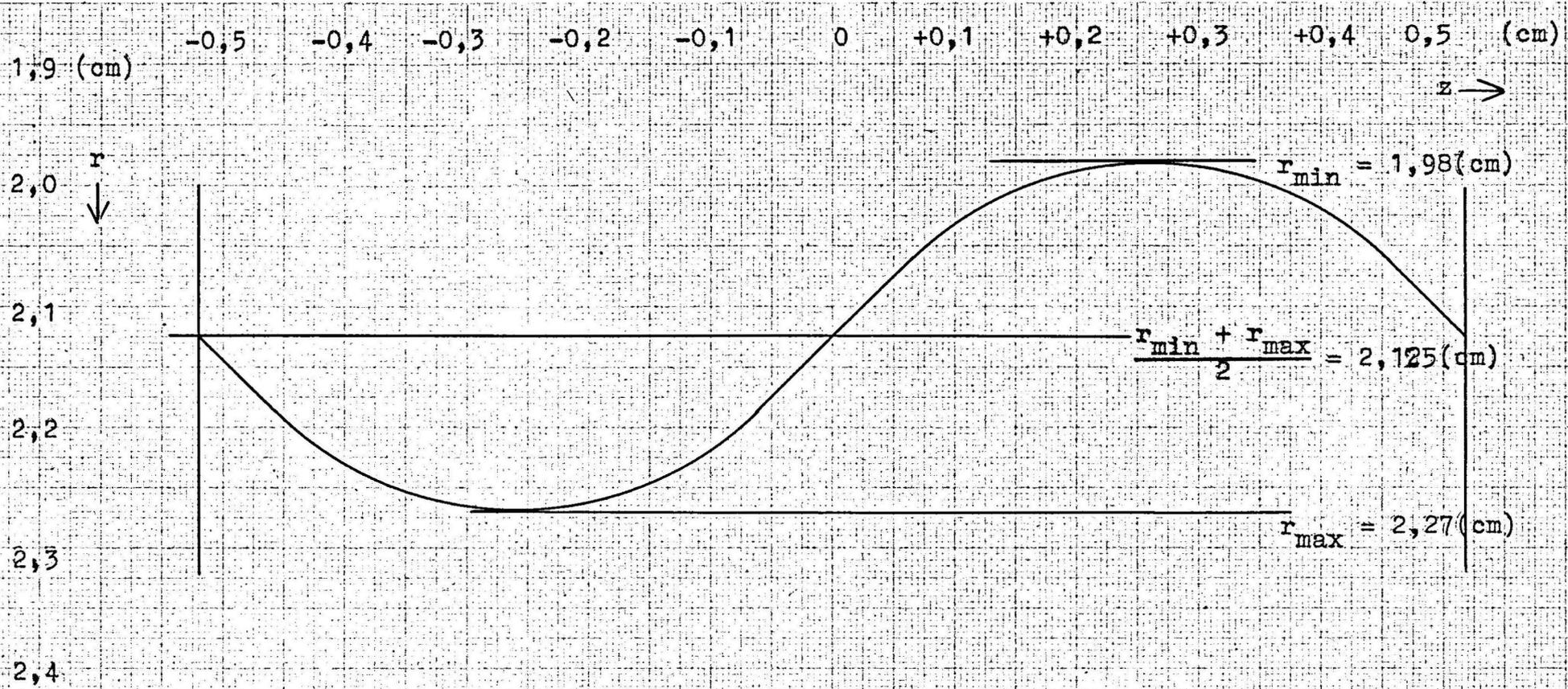
$$P_0 = 2\pi \cdot \frac{1}{\epsilon \cdot \delta} \cdot \frac{1}{(\omega \cdot u)^2} \cdot \frac{p}{a} \cdot k_{(11)}^2 \cdot I_0^2(k_{(11)}) \quad (23)$$

Aus (22) und (23) erhält man für die relative Verlustzunahme:

$$\frac{\Delta P}{P_0} = \frac{P - P_0}{P_0} = \frac{\int_{z=0}^p (f/z^2 + f/r^2) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{f}{f/r}\right)^2} \cdot r \cdot dz}{\frac{p}{a} \cdot k_{(11)}^2 \cdot I_0^2(k_{(11)})} \quad (24)$$

Die numerische Auswertung von (24) für das in Fig. 2 - Kurve I - angegebene Profil bei $\lambda_0 = 2$ (cm) liefert folgenden Wert:

$$\frac{\Delta P}{P_0} = 63 \%$$



Profil des Wellrohres

Maßstab: 20: 1

Fig. 1

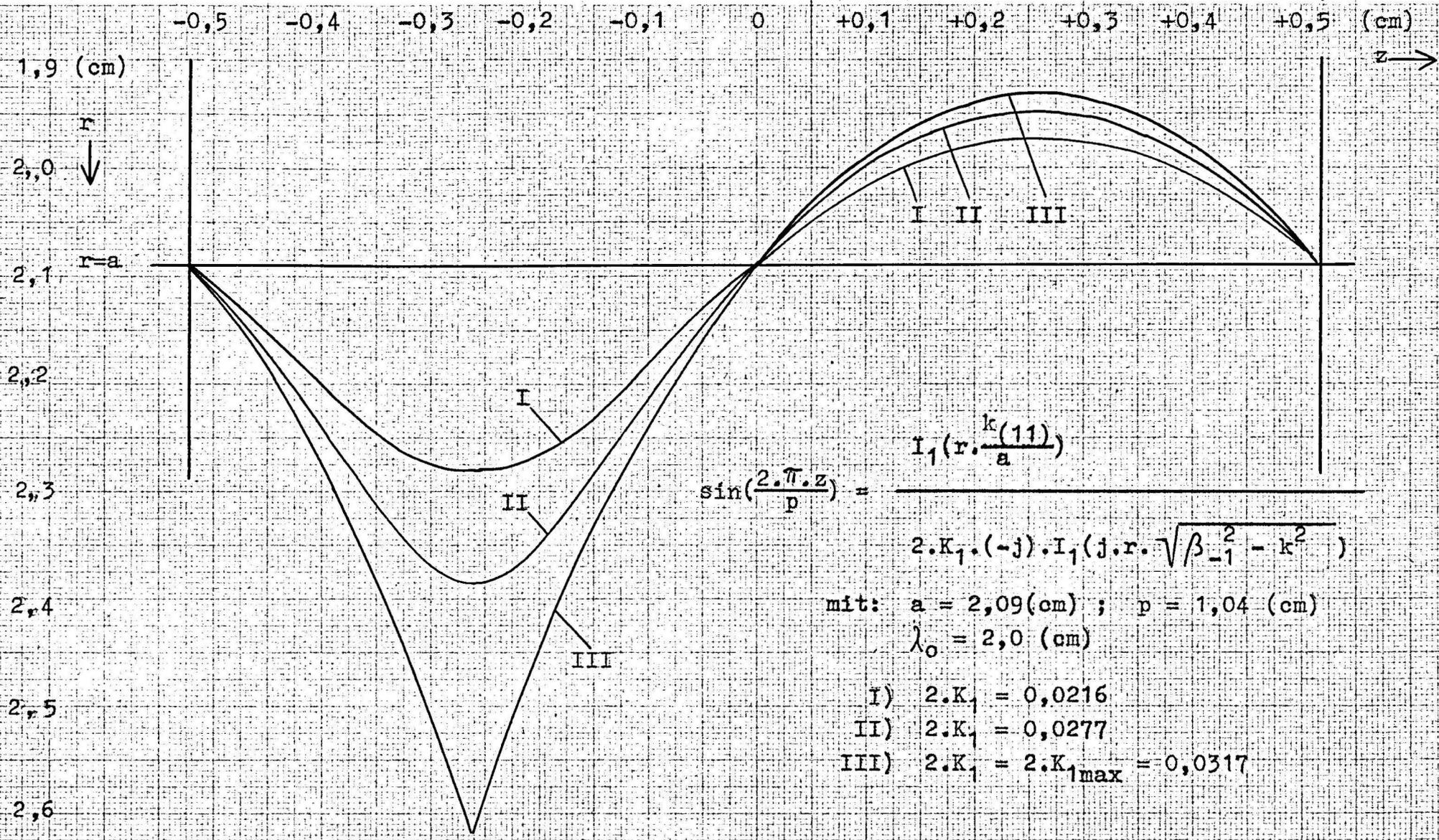


Fig. 2